HOCH
SCHULE
OFFEN
BURG

Labor

Physikalisches Praktikum

Eine Einführung in Protokollführung und Fehlerrechnung

Christian Ziegler
Fakultät Maschinenbau und Verfahrenstechnik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziele des Labors

- Physikalische Kenntnisse werden durch Überprüfen im Experiment vertieft
- Der Studierende
    - beherrscht den sicheren Umgang mit Messgeräten,
    - ist in der Lage, ein Versuchsprotokoll zu erstellen und auszuwerten,
    - kann selbständig Fehlerabschätzungen und eine Fehlerrechnung durchführen.

2 Organisation

2.1 Laborordnung

- Beachte „Hinweise und Regeln für das Physik-Labor“
- Deren Kenntnis wird vor dem ersten Versuchstag durch „Zustimmung zu "Hinweise und Regeln zum Physiklabor"“ in Moodle bestätigt
    - Kursname: *wird in der Einführungsveranstaltung mitgeteilt*
    - Achtung: ohne erfolgte Bestätigung ist Teilnahme am Laborbetrieb **nicht** gestattet
- Laborleitung:
    - Frau Veit-Kiefer, H. Schmidt
    - Prof. Dr. Ziegler

- Essen und Trinken am Labor-Platz ist **nicht** gestattet!!!

2.2 Einteilung der Laborgruppen

- Bildung von Gruppen mit jeweils 2-3 Studenten
- Einteilung erfolgt in der ersten Pause der Laboreinführung
- Im Anschluss daran Ausgabe der Literatur (Oskar-Karte notwendig!)

2.3 Organisation der Labor-Versuche

- Labor findet in 14-tägigem Rhythmus statt; die genauen Termine können der Terminübersicht entnommen werden
- Jede Gruppe führt im Semester vier Versuche durch, ein eventueller fünfter Versuch am REM kann zum Abschluss als Gruppendemonstration durchgeführt werden (ohne Protokoll)
- Im Anschluss an die regulären vier Versuche des Labors findet ein Kolloquium statt
    - Termine können Moodle-Kurs entnommen werden
- Evtl. werden Termine für Nachzügler / Wiederholer bereitgestellt: *siehe Moodle-Eintrag*
- Bei Verhinderung aus zwingendem Grund ist frühzeitig die Laborleitung zu informieren; ggf. Attest mitbringen. Je früher die Meldung, desto eher sind Alternativen möglich.

3 Durchführung eines Versuchs

3.1 Versuchsvorbereitung

- Eine Versuchsdurchführung ohne entsprechende Vorbereitung ist weder sinnvoll noch möglich und führt zum Ausschluss am Versuchstag
    - Dieser „Malus“ kann nur am Kolloquium durch entsprechende positive Leistung ausgeglichen werden
- Ein Versuch kann nur erfolgreich durchgeführt werden, wenn die physikalischen Grundlagen / Zusammenhänge verstanden sind

3.1.1 Wie bereite ich mich auf den nächsten Versuch vor?

- An erster Stelle steht ein sorgfältiges Lesen der Versuchsbeschreibung, die im Moodle-Kurs unter „3. Arbeitsmaterialien“ heruntergeladen werden kann.
- Mit Hilfe der dort angegebenen Literatur erfolgt ein Verstehen und Aneignen der notwendigen physikalischen Grundlagen.
- Hilfreich sind in der Folge Diskussionen mit Kommilitonen, die diesen Versuch bereits durchgeführt haben. Idealerweise wird der Versuchsaufbau schon am vorherigen Praktikumstag angesehen. Dann kann man – sofern sich niemand dadurch gestört fühlt – die gerade den Versuch durchführenden Kommilitonen entsprechend befragen.

- **Jeder Teilnehmer** fasst die physikalischen Grundlagen und die zur Auswertung benötigten Beziehungen („Formeln“), Ziel des Versuchs, Skizze des Aufbaus, Beschreibung der Messmethode, etc. in handschriftlicher Form zusammen.
  Diese Beschreibung sollte einen Umfang von nicht mehr als zwei Seiten haben, aber bitte schreiben Sie nicht die Versuchsanleitung ab!!!

- **Zusatzfragen:** Zu allen Versuchen liegen im Moodle-Kurs Zusatzfragen zur Vorbereitung vor, die das Verständnis der theoretischen Grundlagen bzw. der Auswertemethode erleichtern sollen.
  Die Beantwortung dieser Zusatzfragen ist zwingender Teil der Vorbereitung und muss zu Beginn der Laborveranstaltung von jedem Gruppenteilnehmer in schriftlicher Form bei der Laborleitung abgegeben werden.

- **Moodle-Tests:** Zu allen Versuchen exisitert ein Moodle-Test, der am Tag vor dem Versuchstag erfolgreich durchgeführt werden muss.
  Die erfolgreiche Durchführung des Moodle-Tests ist zwingender Teil der Vorbereitung.

- Alle Ausarbeitungen sind bereits vor Beginn des jeweiligen Praktikums, d.h. zu Hause, so weit wie möglich vorzubereiten, für die Protokollierung notwendige Tabellen und Diagramme können bereits zu Hause vorgefertigt werden, so dass im Anschluss nur noch die Werte eingetragen werden müssen.

3.2 Versuchsdurchführung

- Alle Eintragungen müssen handschriftlich erfolgen. Eventuell in den Unterlagen vorhandene Skizzen oder Tabellen sind unbedingt **von Hand** in das Versuchsprotokoll einzuzeichnen.
  „Es widerspricht dem urkundlichen Charakter eines Protokolls, Messwerte zunächst einmal im Unreinen auf losen Blättern festzuhalten.“

- Die Messergebnisse als eigentlicher Kern der Untersuchungen sind mit Kugelschreiber oder Füller in die vorgefertigten Tabellen einzutragen. Eintragungen mit Bleistift sind unzulässig. Auch hier sei auf den urkundlichen Charakter eines Protokolls verwiesen. Hiervon ausgenommen sind nur Skizzen und Diagramme.

- Die Protokollführung sollte abwechselnd innerhalb einer Gruppe erfolgen. Schönschrift ist nicht zwingend nötig, allerdings sollten die Aufzeichnungen leserlich sein. Es darf weder gelöscht noch Seiten herausgerissen werden. Gegebenenfalls ist zu protokollieren, weshalb eine Messreihe zur Auswertung nicht verwendet werden darf.

- Zu jeder Messung sind die systematischen Messfehler abzuschätzen und zu protokollieren.

- Nach Abschluss der Messungen wird das Versuchsprotokoll vom Assistenten durch Stempel und Unterschrift testiert.

3.3 Versuchsauswertung und Protokollführung

3.3.1 Bedeutung des Protokolls

Die Ausarbeitung soll in der Form und Art eines technischen Berichtes verfasst werden, vom Stil her vergleichbar zur Bachelorarbeit oder zu einem technischen Bericht in einer Firma, d.h. "vom Fachmann für den Fachmann".
Da gerade in einem Ingenieurstudium wenige Möglichkeiten zur Vervollkommnung (fach-) sprachlicher Fähigkeiten bestehen, sollte die Gelegenheit genutzt werden, eine gewisse sprachliche Wendigkeit in Bezug auf technische Darstellungen einzuüben. Die ist auch wichtig für die im weiteren Verlauf geforderten schriftlichen Ausarbeitungen wie z.B. dem Industrie-Projekt oder der Bachelorarbeit.

Bedenken Sie:
Anhand des Textes sollte erkennbar sein, dass Sie die Hochschulreife besitzen!

- Das Versuchsprotokoll hat die Aufgabe, das gesamte Experiment von der Fragestellung über die Durchführung bis hin zur Auswertung dokumentarisch festzuhalten.

- Das Protokoll sollte ein homogenes Aussehen besitzen. Es muss hinsichtlich Inhalt und Form eine Einheit bilden.

- Es muss von einer fremden, mit der Materie insgesamt vertrauten Person gelesen und verstanden werden können, und es sollte diese Person prinzipiell in die Lage versetzen, ohne Einholen zusätzlicher Informationen das gleiche Experiment mit den gleichen Geräten jederzeit wiederholen zu können.

- Protokolle werden nicht nur als „lästige Pflicht“ im Rahmen von Praktika geführt. Das Führen und Archivieren eines Protokollbuchs gehört vielmehr unabdingbar zum Alltag des wissenschaftlichen Arbeitens. Im Zweifelsfall muss ein Protokollbuch als Beleg für erzielte Messergebnisse dienen.

3.3.2 Inhalt und Aufbau eines Protokolls

- Siehe „*Hinweise und Regeln für das Physik-Labor*“ im Moodle-Kurs

- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus und geben Sie dort die relevanten Ergebnisse des Versuchs an

- Aufbau des eigentlichen Versuchsprotokolls:

  1. Kurze Darstellung des Versuchsgegenstandes: was ist Ziel des Versuches, was soll gemessen werden?
     Dieser Teil des Protokolls sollte keinesfalls länger als eine Seite sein, und für das Schreiben sollte nicht mehr als eine viertel Stunde aufgewendet werden.
  2. Darstellung der theoretischen Grundlagen.
  3. Kurze Beschreibung der Versuchsdurchführung mit Darstellung der Versuchsaufbauten in Form von Prinzipskizzen mit kurzer Erläuterung. Skizzen können z. B. auch aus der Versuchsanleitung oder aus anderen Quellen übernommen werden. In diesem Fall muss die Quelle korrekt zitiert werden.

     Bei sinnvoller Vorbereitung, siehe Abschnitt 3.1.1, reichen die angefertigten ein bis zwei Seiten für diese ersten drei Punkte der Ausarbeitung aus.

  4. Bei Bedarf dokumentieren Sie diejenigen äußeren Versuchsbedingungen, die die Versuchsergebnisse beeinflussen können, z.B. die Temperatur im Labor, sowie die möglichen Fehlerquellen, z.B. Ablesefehler von Messgeräten.
     Nur bei einer erfolgten Dokumentation dieser Versuchsbedingungen kann später ein zunächst unerwartetes Ergebnis möglicherweise erklärt werden.
  5. Tabellarische Darstellung der Ergebnisse der Messreihen. Tabellen müssen innerhalb des Protokolls fortlaufend nummeriert und mit kurzen erläuternden Unterschriften versehen werden, aus denen hervorgeht, was in der Tabelle dargestellt ist.
  6. Fehlerrechnung: Berechnung der Messunsicherheit und Fehlerabschätzungen innerhalb einer ausführlichen Fehlerrechnung.
  7. Ergebnis kommentieren und, falls vorhanden, mit dem Literaturwert vergleichen.
  8. Als Anlage die Unterlagen des Versuchsprotokolls.

- Die in der Auswertung durchzuführenden Berechnungen müssen so übersichtlich aufgezeichnet werden, dass der Rechengang nachvollziehbar ist.
- Grafische Darstellungen sind grundsätzlich auf Millimeterpapier in DIN-A4 zu erstellen. Der Maßstab ist dabei so zu wählen, dass das Blatt optimal ausgenutzt wird.
  Diese Forderung wird ein wenig eingeschränkt durch die Forderung, eine sinnvolle Einheit des Maßstabs zu wählen, so dass die einzelnen Datenpunkte von Ihnen einfach eingezeichnet und von einem Leser genau so einfach ausgelesen werden können.
  Jedes Diagramm muss eine Überschrift haben.

- Die Abgabe der Ausarbeitung erfolgt innerhalb einer Woche bei der Versuchsassistenz im Raum B039 bzw. B041.

- Die Korrektur erfolgt bis zum nächsten Versuchstag. Falls die Ausarbeitung o.k. ist, dann erfolgt das Haupttestat durch den Labor-Leiter.

4 Bestimmung von Messunsicherheiten, Fehlerrechnung

“Step inside, ladies & gentlemen,” said the museum attendant, “and see the dinosaurian skeleton which is 200.000.001 years old.”
How are you so certain of its age?” asked a visitor.
“Well,” he replied, “last year when I started this job it was 200.000.000 years old.”

Quelle: H. Hayden, Lab physics for the life sciences, Philadelphia.

4.1 Messfehler und ihre Klassifizierung

- Für jede messbare Größe existiert ein wahrer Wert.
- Es ist allerdings prinzipiell unmöglich, diesen mit Messungen zu bestimmen.
- Jede Messung ist mit einem Messfehler behaftet. Es gibt keine Messung, die unendlich genau ist!
  - Daher ist die Aussage „Ich habe die Länge eines Stabs gemessen, sie beträgt 0,318 m“ nicht korrekt.
- Das Ziel einer Messung besteht darin, einen Schätzwert für den „wahren Wert“ der betreffenden Messgröße zu bestimmen, der zusammen mit der Messunsicherheit zur Kennzeichnung eines Wertebereichs für den wahren Wert der Messgröße dient.
- So kann auch entschieden werden, ob zwei unabhängige Messungen – innerhalb der Fehlergrenzen – in Übereinstimmung zueinander sind und eine konsistente Abschätzung des wahren Werts liefern.

  → Dies ist die Aufgabe der Fehlerrechnung.

Dass genauer nicht gleich besser sein muss, zeigt das folgende Beispiel:
Die Bestimmung der Elementarladung ergab folgende Ergebnisse:

- Messung 1: $e = (1{,}7 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$,
- Messung 2: $e = (1{,}62 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

- Messung 1 ist konsistent mit dem Literaturwert $e = 1{,}602176487(40) \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$,
- Messung 2 ist zwar präziser, stimmt aber innerhalb der Fehlergrenzen nicht mit dem Literaturwert überein.

Angenommen, wir haben im vorherigen Beispiel den Messfehler der Längenmessung zu 0,005 m bestimmt, dann ist die Aussage:

- „*Die Länge des Stabs beträgt (0,318±0.005) m*“ in der Umgangssprache akzeptabel,
- besser wäre jedoch „*Die Messung ergab (0,318±0.005) m*“.
- Noch besser wäre die Aussage: „*Der wahre Wert der Länge des Stabs liegt mit hoher Wahrscheinlichkeit im Bereich (0,318±0.005) m*“.

4.1.1 Systematische Fehler

- Systematische Fehler liegen im Messsystem oder im Messgerät begründet bzw. werden durch die Messmethodik verursacht
- Beispiele für systematische Fehler sind:
    - Durch unsachgemäße Behandlung hat sich die Skala eines Thermometers z.B. um 3 °C nach unten verschoben, so dass die Schmelztemperatur des Eises mit +3 °C angezeigt wird.
      Somit zeigt dieses Thermometer **alle** Temperaturen um 3 °C zu hoch an.
    - Ein Präzisionslängenmaßstab ist bei einer Temperatur von 20 °C geeicht. Werden nun Messungen bei niedrigerer Temperatur durchgeführt, dann ist der Maßstab durch die Wärmekontraktion etwas kleiner geworden, und damit sind alle erhaltenen Messwerte zu hoch.
    - Eine Messuhr besitzt einen falschen Gang und geht permanent vor oder nach. Damit sind alle Zeitmessungen „systematisch“ falsch.
    - Eine Waage wurde vor der Wägung nicht auf 0 gestellt. Auch dieser sogenannte „Nullpunktsfehler“ gehört in die Kategorie der systematischen Fehler.
    - …

- Bei systematischen Fehlern weichen die Messwerte zumeist in die gleiche Richtung vom wahren Wert ab und sind reproduzierbar.
- Systematische Fehler könnten durch zusätzliche, unabhängige Experimente bzw. durch ein Austauschen des Messinstrumentes bei einer Untersuchung erkannt bzw. vermieden werden.
- Darüber hinaus geben viele Hersteller Obergrenzen für die systematischen Fehler ihrer Messinstrumente an.
    - Beispiel: „Ein handelsüblicher Messschieber liest auf 0,1 mm ab und besitzt einen systematischen Fehler von maximal 0,1 mm“
    - …

4.1.2 Zufällige oder statistische Fehler

- Diese Art von Fehlern sind unvermeidbar
- Sie werden z.T. durch menschliche Unzulänglichkeiten verursacht
- Statistische Fehler führen zur Streuung der Messwert in beide Richtungen um den Mittelwert
- Sie können z.T. aber aus dem Aufbau des Messgeräts und aus der Reaktions- und Beobachtungsfähigkeit eines gewissenhaft Messenden abgeschätzt werden
- Beispiele:
    - Für Thermometerskala, die in Schritten von fünftel Grad eingeteilt ist, liegt ein geschätzter zufälliger Fehler von $\Delta T = 0{,}2\ °C$ vor.
    - Die Länge eines Stabs wird mit einem Maßband gemessen, das eine Einteilung in mm besitzt. Somit ist der Messfehler durch die Ablesegenauigkeit mit $\Delta l = 1\ \mathrm{mm}$ gegeben.
    - Der Durchmesser einer Welle wird mit einem Messschieber gemessen. Die Ablesegenauigkeit beträgt je nach Ausführung $\Delta l = 0{,}1\ \mathrm{mm}$ bzw. $\Delta l = 0{,}05\ \mathrm{mm}$.
    -
    -
    -

Die Einteilung der Fehler in statistische und systematische Beiträge ist nicht immer eindeutig, und es gibt einen gewissen Ermessensspielraum in der Zuordnung.

4.1.3 Fehlerdarstellungen

Für beide Arten von Messfehlern, systematische und statistische Fehler, wird unterschieden nach

- dem absoluten Fehler, einer Größe, die die gleiche Einheit wie die Messgröße hat. Als Beispiel sei der Fehler einer Längenmessung von $\Delta l = 1\ \mathrm{mm}$ genannt,
- dem auf den Messwert bezogenen Fehler, d.h., dem relativen Fehler, z.B. $\frac{\Delta l}{l} = 0{,}05$. Der relative Fehler ist somit dimensionslos und hat die Einheit 1,
- und mit dem relativen Fehler direkt verbunden, dem prozentualen Fehler, der dadurch entsteht, dass der Wert des relativen Fehler in Prozent ausgedrückt wird, z.B. $\frac{\Delta l}{l} \cdot 100\ \% = 0{,}05 \cdot 100\ \% = 5\ \%$.

4.2 Statistische Kennzahlen von Messreihen

Auf Grund der Messfehler wird bei n-maliger Wiederholung einer Messung jeweils ein unterschiedlicher Wert der zu messenden Größe x gemessen,

Die Einzel-Messwerte seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (bzw. mathematisch formal $\{x_i\}$; $i = 1, \ldots n$).

Diese Messwerte können als Stichprobe vom Umfang n einer Gesamtverteilung betrachtet werden. Aus dieser Stichprobe lassen sich einige Kennzahlen berechnen, die in der Lage sind, auch die eigentlich interessierende Gesamtverteilung zu beschreiben. Es sind dies:

i) Mittelwert der Verteilung als wahrscheinlichster Wert: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$,

ii) Abweichungen der jeweiligen Messwerte vom Mittelwert: $\delta_i = x_i - \bar{x}$,
zur Kontrolle: es muss gelten $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0$,

iii) Standardabweichung: $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$,

iv) Mittlerer Fehler des Ergebnisses: $\Delta x = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$,

Schließlich erfolgt die Angabe des Ergebnisses in der Form $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

4.3 Fehlerfortpflanzung

- Physikalische Größen werden häufig nicht direkt gemessen, sondern aus anderen Größen errechnet. Auch diese Größen sind mit Messfehlern behaftet.

- Gesucht ist die Auswirkung der Messfehler der ursprünglich gemessenen Größen auf den Fehler der eigentlich gesuchten Größe.

4.3.1 Fehlerfortpflanzung für Funktionen einer Veränderlichen

Dieser Abschnitt soll an einem einfachen Beispiel anschaulich erklären, welche Eigenschaft einer Funktion in die Fehlerfortpflanzung eingeht.
Betrachten wir den Orts-Zeit-Verlauf einer gleichförmigen Bewegung $s = s(t) = v \cdot t$ mit gegebener Geschwindigkeit v.
Anstelle den Ort direkt zu messen, wäre es auch möglich, indirekt aus der gemessenen Zeit t und der bekannten Geschwindigkeit v den Ort durch $s = v \cdot t$ zu bestimmen.

Aus der Messung bekannt seien der mittlere Wert $\bar{t}$ der Zeit und der mittlere Fehler der Zeit Δt. Diese beiden Kennzahlen definieren ein Intervall $[\bar{t} - \Delta t, \bar{t} + \Delta t]$ mit der Intervallmitte $\bar{t}$. In Abbildung 1 ist der zeitliche Verlauf des Orts für zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten dargestellt. Dabei entspricht die Geschwindigkeit gerade der Steigung der Kurve im Orts-Zeit-Diagramm und damit der Ableitung des Orts nach der Zeit, $v = \dot{s}$.

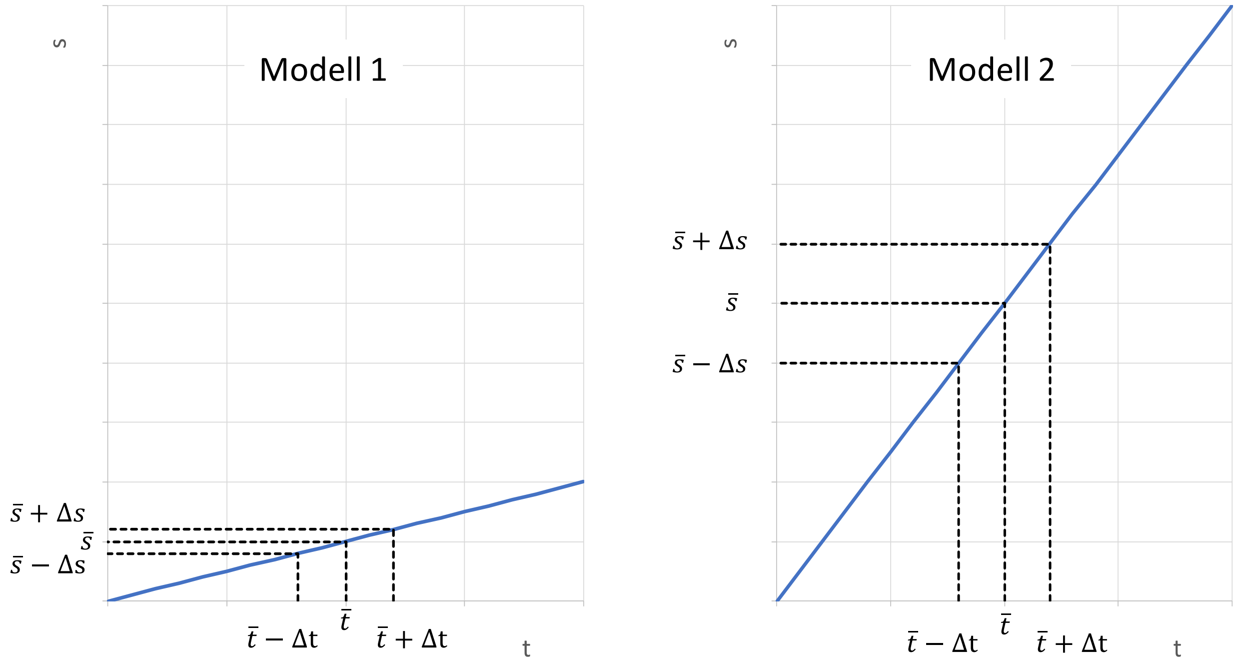


Abbildung 1: Orts-Zeit-Verlauf für unterschiedliche Geschwindigkeiten

Variieren die gemessenen Zeiten im Intervall $[\bar{t} - \Delta t, \bar{t} + \Delta t]$, dann lässt sich aus Abbildung 1 erkennen, dass die Variation der zugehörigen Orte in beiden Modellen deutlich unterschiedlich ist, obwohl die Streuung der Zeit mit Δt identisch ist. Die Differenz der Orte an den Intervallgrenzen, z. B. $s(\bar{t} - \Delta t)$, zum Ort der Intervallmitte, $s(\bar{t})$, ist ein Maß für den mittleren Fehler Δs des Orts.
Und daraus wird ersichtlich, dass sich eine Unsicherheit Δt in der Zeit umso stärker auf die Unsicherheit Δs des Orts auswirkt, je größer die Geschwindigkeit und damit die 1. Ableitung ist.

4.3.2 Fehlerfortpflanzung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Und nun wird dieses eindimensionale Beispiel auf Funktionen mehrerer Veränderlichen verallgemeinert.
Dabei werden Methoden aus der Mathematik benötigt, die in einem Ingenieurs-Studiengang typischerweise erst im 2. Semester vermittelt werden, also in der Regel parallel zum Laborbetrieb. Der mathematische Aufwand bleibt überschaubar, alleine die allgemeine Darstellung mit Indizes ist am Anfang etwas gewöhnungsbedürftig.

Die gesuchte (zusammengesetzte) Größe X stehe in funktionalem Zusammenhang mit k Größen X_1, X_2,…, X_k, die im Experiment jeweils ermittelt werden,

$$X = f(X_1, X_2, \ldots X_k). \tag{1}$$

Achtung: an dieser Stelle besteht die Gefahr der Verwechslung der Bedeutung der unterschiedlichen Größen. Die Größen X_1, X_2, … X_k stellen jeweils unterschiedliche physikalische Größen dar, wobei jede für sich mehrere Male gemessen wird, um die entsprechenden Kennzahlen nach Absatz 4.2 bestimmen zu können. Die Situation klärt sich hoffentlich in dem weiter unten aufgeführten Beispiel auf.

- Für die einzelnen Größen X_i seien darüber hinaus jeweils Mittelwert $\bar{x}_i$ und mittlerer Fehler Δx_i bekannt $(i = 1, \dots k)$:

$$x_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_i\,; \quad i = 1, \dots k$$

Wenn nun aus der Stichprobe einer jeden Größe X_1, X_2, … ein Wert x_{1i}, x_{2j}, … entnommen wird, dann kann durch Einsetzen all dieser Werte in die Gleichung (1) ein Wert der zusammengesetzten Größe X erhalten werden. Wird über alle möglichen Kombinationen der jeweiligen Einzelmessgrößen jeweils der entsprechende Wert der Größe X berechnet, dann können all diese zusammengesetzten Werte als Stichprobe der Größe X dienen, und es lassen sich ganz entsprechend die in Absatz 4.2 aufgelisteten statistischen Maßzahlen bestimmen. Von besonderem Interesse sind dabei natürlich der Mittelwert und die Standardabweichung.
Für den Mittelwert $\bar{x}$ der zusammengesetzten Größe X ergibt sich:

$$\bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_k) \tag{2}$$

4.3.2.1 Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

- Für den mittleren Fehler Δx der zusammengesetzten Größe X ergibt sich:

$$\Delta x_{\text{statistisch}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_k)}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j \right)^2} \tag{3}$$

Diese Beziehung wird als ***Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz*** (bzw. quadratisches Fehlerfortpflanzungsgesetz) bezeichnet und gilt für den Fall, dass die Fehler jeweils auf beiden Seiten des Mittelwerts liegen und sich somit in ihrer Wirkung auf die Größe X teilweise kompensieren.
Diese Beziehung (3) gilt also insbesondere für statistische Fehler.

- Das Ergebnis der Messung lautet dann:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{statistisch}}.$$

Dabei bedeutet $\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots\bar{x}_k)}{\partial x_j}$ die „partielle Ableitung“ der Funktion f nach der Variablen x_j. Und damit hängt die Unsicherheit in diesem verallgemeinerten Fall auch mit der Ableitung der Zielfunktion nach den unabhängigen Variablen zusammen, wie dies in Abschnitt 4.3.1 für den Fall einer Funktion einer Veränderlichen gezeigt wurde. Falls Ihnen die Bedeutung bzw. die Berechnung von partiellen Ableitungen noch nichtgeläufig ist: Die Funktion f wird bei der Bestimmung der partiellen Ableitung nach x_j so behandelt, als wären alle Variablen x_i Konstanten mit Ausnahme von x_j. Als Argumente werden die jeweiligen Mittelwerte eingesetzt.

4.3.2.2 Fehlerfortpflanzung für systematische Fehler

- Die Überlegungen aus Abschnitt 4.3.2.1 gelten entsprechend.

- Allerdings weichen in diesem Falle die Messwerte alle nur in eine Richtung vom Mittelwert ab, die einzelnen Messwerte können sich somit im denkbar schlechtesten Fall nicht mehr teilweise gegenseitig kompensieren, und das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (3) darf für die Berechnung des mittleren Fehlers nicht herangezogen werden.

- Für die Abschätzung des systematischen Fehlers ergibt sich in diesem Fall für den maximal möglichen Fehler – den ungünstigsten Fehler – das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta x_{\text{systematisch}} = \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots\bar{x}_k)}{\partial x_j} \right| \cdot \Delta x_j . \qquad (4)$$

Nach diesen beiden Regeln (3) und (4) erhält man schließlich getrennt einen statistischen und einen systematischen Fehler des Endergebnisses.
Auch wenn diese beiden Werte gelegentlich addiert werden, um eine Aussage über den maximalen Gesamtfehler zu erhalten, ist diese Addition im Sinne einer statistischen Aussage **unzulässig**!!!
Diese beiden Zahlen dürfen nicht zu einem Gesamtfehler addiert werden, sondern bleiben eigenständig in ihrer Aussage. Die korrekte Angabe des Messergebnisses lautet in diesem Fall:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{systematisch}} \pm \Delta x_{\text{statistisch}} .$$

Bei vielen Experimenten sind entweder die statistischen oder die systematischen Fehler so klein, dass sie im Verhältnis zur anderen Fehlerart vernachlässigt werden können. Oft kann man sie auch schon vor der Fehlerrechnung zusammenfassen und dann das Fehlerfortpflanzungsgesetz für die überwiegende Art von Fehlern anwenden. Dies vereinfacht die Rechnung natürlich erheblich.

4.3.3 Beispiele für die Fehlerfortpflanzung

1) Bestimmung der Seitenfläche eines Holzquaders:

In einer Versuchsreihe wurden jeweils Länge, Breite und Höhe eines Holzquaders bestimmt. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

i	l / cm	h / cm	b / cm
1.	9,9	3,8	6,08
2.	9,9	3,85	6,17
3.	9,9	3,85	6,16
4.	10,00	3,88	6,31
5.	9,9	3,83	6,33
6.	9,9	3,84	6,08
7.	9,9	3,87	6,195
8.	10,00	3,85	6,155
9.	10,00	3,88	6,11
10.	9,95	3,83	6,25
11.	10,05	3,96	6,13
12.	10,00	3,97	6,1
-	-	-	-
Mittelwert/cm			
Mittlerer Fehler/cm			

Tabelle 1: Messergebnisse der Abmessungen des Holzquaders

Wir wollen zunächst nur die Seitenfläche des Holzquaders, gegeben durch die Größen l und h (2. und 3. Spalte in Tabelle 1), berechnen.

a) Bestimmen Sie in Gruppenarbeit zunächst jeweils den Mittelwert als auch den mittleren Fehler der Einzelmessgrößen l, h, b.
b) Sind Sie in der Lage, mit Hilfe von (2) den Mittelwert der Seitenfläche zu berechnen?
c) Zur Berechnung des mittleren Fehlers der Seitenfläche müssen zunächst die partiellen Ableitungen berechnet werden.

   Die Seitenfläche A ist eine Funktion der Größen l und h, und es gilt:

   $$A = A(l, h) = l \cdot h.$$

   Somit gilt für die partiellen Ableitungen: $\frac{\partial A}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}(l \cdot h) = h$, $\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}(l \cdot h) = l$.

d) Und jetzt sind wir in der Lage, den mittleren Fehler sowohl mit dem linearen als auch dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu berechnen.

Das Vorgehen bei der Berechnung des mittleren Fehlers mit Hilfe des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ist also stets ein Verfahren in drei Schritten:

1. Schritt: Identifikation der Variablen des Problems mit den allgemeinen Variablen in Gleichung (1)

2. Schritt: Berechnung der partiellen Ableitungen

3. Schritt: Einsetzen in die Gleichungen (3) bzw. (4) zur Berechnung des mittleren Fehlers

2) Bestimmung des Volumens des Holzquaders

Diese Berechnung ist Teil der Auswertung des ersten (gemeinsamen) Laborversuchs!

3) Bestimmung des mittleren Fehlers einer Größe mit Potenzgesetz

Betrachten Sie eine Größe Z, die sich als Funktion zweier Größen X und Y mit $z = f(x,y) = x^n \cdot y^k$ ergibt.
Die mittleren Fehler von X und Y seien bekannt und werden mit Δx und Δy bezeichnet.

a) Berechnen Sie zunächst die partiellen Ableitungen der zusammengesetzten Größe $z = f(x,y) = x^n \cdot y^k$ nach x bzw. y.
b) Verwenden Sie jetzt das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (3), um den mittleren Fehler der Größe Z zu berechnen.
c) Interessant ist weiter, wie groß der relative Fehler ist. Sie erhalten dies, indem Sie den mittleren Fehler aus Teil b) durch den Mittelwert $\bar{z} = f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}^n \cdot \bar{y}^k$ dividieren.

Diese Berechnung ist als Übung für zu Hause gedacht.

4) Weiteres Beispiel für den mittleren Fehler einer zusammengesetzten Größe

Angenommen, Sie wollen die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs während einer gleichförmigen Bewegung messen. Gleichförmig wird eine Bewegung dann genannt, wenn die Geschwindigkeit konstant ist. Und weiter nehmen wir an, dass Sie die Geschwindigkeit so messen, dass Sie für eine gegebene Wegstrecke s die zum Durchlaufen benötigte Zeit t messen. Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ergibt sich dann zu $v = \frac{s}{t}$.
Dann müssen Sie die Länge dieser Wegstrecke und die hierfür benötigte Zeit jeweils n Mal messen, und Sie erhalten schließlich eine Aufstellung vergleichbar zu Tabelle 1.
Bestimmen Sie jetzt ganz analog zum vorangegangenen Beispiel den Mittelwert und den mittleren Fehler der Geschwindigkeit.

4.4 Lineare Regression

Eine weitere Möglichkeit, die Geschwindigkeit bei einer gleichförmigen Bewegung zu messen, besteht darin, den Ort s_i zu unterschiedlichen Zeiten t_i zu messen. Der kinematische Zusammenhang zwischen dem Ort s und der Zeit t lautet bekanntlich $s = s(t) = v \cdot t$ mit einer zu bestimmenden Größe v, der gesuchten Geschwindigkeit.

Dies ist ein Spezialfall eines häufig in der Natur anzutreffenden linearen Zusammenhangs einer zu messenden Größe Y und einer unabhängigen Variablen X

$$y = f(x) = m \cdot x + b, \tag{5}$$

d.h., der Verlauf entspricht einer Geraden mit der Steigung m und dem Achsenabschnitt b. Die Größen m und b sind hier als konstant anzusehen.
Führt man Messungen bei vorgegebenen Werten x_i ; $i = 1, \dots n$ durch, so werden die Messwerte y_i i.a. von zufälligen Fehlern beeinflusst und liegen, wie in Abbildung 2 dargestellt, keineswegs exakt auf einer Geraden.
Die Aufgabe der linearen Regression besteht nun darin, diejenige Gerade zu bestimmen, die sich diesen Messpunkten „möglichst gut“ anpasst. Es gelingt ohne große Schwierigkeiten, frei nach Augenmaß eine Gerade einzuzeichnen, die diesen Anforderungen schon recht nahe kommt.

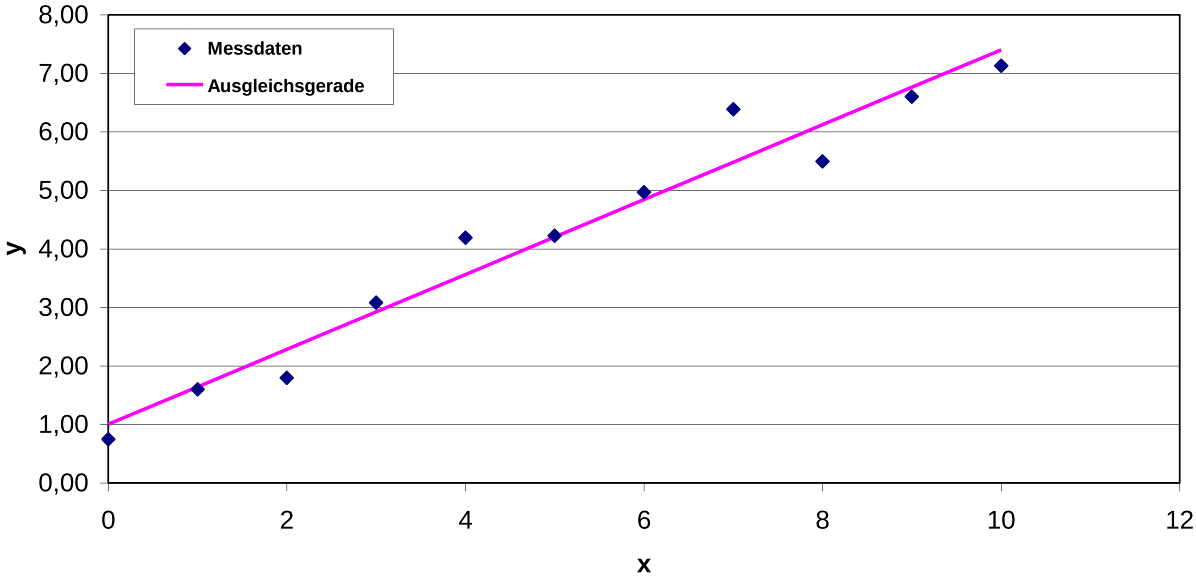


Abbildung 2: Messdaten eines linearen Zusammenhangs

Eine quantitative Analyse dieser Aufgabe basiert auf der ***Methode der kleinsten Fehlerquadrate***, die ebenfalls auf C.F. Gauß zurückgeht.
Bei diesem Verfahren werden die optimalen Werte für die Steigung m und den Achsenabschnitt b bestimmt, die die Summe der quadratischen Abweichungen der einzelnen Messpunkte von der Geraden minimiert.

Für die Summe der quadratischen Abweichungen der einzelnen Messpunkte von der Geraden gilt

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f(x_i)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-m\cdot x_i-b)^2=S(m,b). \tag{6}$$

Da die Messwerte $(x_i,y_i)\,;\quad i=1,\ldots n$ in dieser Überlegung als konstant betrachtet werden können, stellt Gleichung (6) eine Funktion der zwei Variablen m und b dar. In der Mathematik II haben Sie Methoden kennengelernt bzw. werden Sie erst noch kennenlernen, wie das Maximum einer Funktion zweier Veränderlicher mit Hilfe der Differenzialrechnung bestimmt werden kann. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit der Angabe der Ergebnisse. Es gilt für die Regressionsparameter

$$m=\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \tag{7}$$

$$b=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}. \tag{8}$$

Für die zugehörigen Fehler lassen sich im Rahmen der Statistik ebenfalls entsprechende Abschätzungen angeben:

$$(\Delta m)^2=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-m\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)-b\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \tag{9}$$

$$(\Delta b)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\cdot(\Delta m)^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-m\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)-b\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\right)}{(n-2)\cdot\left(n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}. \tag{10}$$

Interessanterweise gibt es bei der linearen Regression einen Parameter, der die Güte der linearen Anpassung beschreibt und als Regressionskoeffizient R bezeichnet wird. Er liegt im Bereich $-1\le R\le 1$. Je näher der Regressionskoeffizient den Werten 1 bzw. -1 kommt, desto besser ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs erfüllt und desto besser liegen die Punkte auf einer Geraden. Es gilt

$$R^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)-\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right)}. \tag{11}$$

Beispiel einer linearen Regression:

Die Messdaten in Tabelle 2 zeigen den linearen Zusammenhang, der in Abbildung 2 dargestellt ist

x	y
0	0,75
1	1,60
2	1,80
3	3,08
4	4,19
5	4,23
6	4,97
7	6,38
8	5,50
9	6,60
10	7,13

Tabelle 2: Messdaten eines linearen Zusammenhangs

Aufgabe:
Berechnen Sie die Regressionsparameter m und b, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Abbildung 2.

Hinweis für die Vorbereitung auf einen Versuch, bei dem eine Parameterbestimmung mit Hilfe der linearen Regression durchgeführt wird:
Sobald in der Versuchsbeschreibung das „magische Wort“ „*lineare Regression*“ auftaucht, sollten Sie die folgenden Fragen auf Ihren Seiten der Versuchsvorbereitung beantworten:

1. Wie lautet der theoretische Zusammenhang, der mit Hilfe der linearen Regression dargestellt werden soll?
2. Wie muss dieser Zusammenhang möglicherweise dargestellt werden, damit sich tatsächlich eine lineare Gleichung ergibt?
   Dazu äquivalent:
3. Welche Größe muss in einem Diagramm auf der x-Achse und welche Größe auf der y-Achse dargestellt werden, damit sich tatsächlich eine Gerade ergibt?
4. Wenn Sie mit Hilfe der Gleichungen (7)-(11) Werte für die Steigung m und den Achsenabschnitt b berechnet haben, wie ergeben sich hieraus die gesuchten Größen Ihres Versuchs?

4.4.1 Nichtlineare Zusammenhänge

Auch für viele nichtlineare Zusammenhänge lassen sich mittels einer Variablensubstitution die Parameter mit Hilfe der linearen Regression bestimmen:

a) Zusammenhang $y = f(x) = m \cdot x^2 + b$
Auftragen von y über x^2 liefert einen linearen Zusammenhang, dessen Parameter mit Hilfe der obigen Beziehungen berechnet werden können (lineare Auftragung).

b) Zusammenhang $y = f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{bx}$.
Beidseitiges Logarithmieren führt auf $\ln y = \ln f(x) = \ln a + bx$
Auftragen von $\ln y$ über x liefert eine Gerade mit Steigung b und Achsenabschnitt $\ln a$ (einfach logarithmische Auftragung / halbseitig logarithmische Auftragung).

c) Zusammenhang $y = f(x) = a \cdot x^b$.
Beidseitiges Logarithmieren führt auf $\ln y = \ln f(x) = \ln a + b \cdot \ln x$
Auftragen von $\ln y$ über $\ln x$ liefert eine Gerade mit Steigung b und Achsenabschnitt $\ln a$ (doppelt logarithmische Auftragung).

Beispiel eines nichtlinearen Zusammenhangs mit anschließender Realisierung mittels linearer Regression:
Die Schwingungsdauer eines linearen Federpendels der Masse m und der Federkonstanten C ergibt sich durch

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} \tag{12}$$

Wenn man nun für unterschiedliche Massen m_i jeweils die zugehörige Schwingungsdauern T_i misst, dann kann mit Hilfe der linearen Regression die Federkonstante C der Feder bestimmt werden.
Quadrieren der Gleichung (12) liefert

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{C} = \frac{4\pi^2}{C} \cdot m$$

Das Quadrat der Schwingungsdauer steht also in einem linearen Zusammenhang mit der Masse, und ein Auftragen der Messwerte von T^2 über m in einem Diagramm würde somit zu einer Geraden führen. Ein Vergleich dieses Zusammenhangs mit Gleichung (5) liefert direkt den Zusammenhang von Steigung und Ordinatenabschnitt (y-Achsenabschnitt) mit der gesuchten Federkonstanten C.
Finden Sie diesen Zusammenhang?

5 Auszug aus dem „Leitfaden für den Gebrauch des Internationalen Einheitensystems“ [1]

Dieser Leitfaden wird Sie zunächst wohl wegen seiner Größe und vielen Details abschrecken. Allerdings beinhaltet er viele Details und formale Aussagen, die Ihnen auch bei der Erstellung Ihrer Bachelor-Arbeit und jedes weiteren Berichts in Ihrem zukünftigen Berufslebens zugutekommen. Wenn Sie also irgendwann einmal diese formalen Vorgaben umsetzen sollten – wie gesagt: spätestens zur Bachelor-Arbeit –, dann sollten Sie doch möglichst früh diese Vorgaben umzusetzen versuchen.
Also: „je früher, desto besser“ lautet auch hier das Motto.

- Herausgegeben wird der Leitfaden von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, bearbeitet von Peter Draht, 1996.

- Die vollständige Darstellung der aktuellen Version kann im Moodle-Kurs abgerufen werden.

5.1 Größengleichungen und Zahlenwertgleichungen

In einer Größengleichung wird eine Beziehung zwischen Größen dargestellt. Die Auswertung der Größengleichung $v = s/t$ liefert immer das gleiche Ergebnis, unabhängig davon, in welchen Einheiten s, t und v dargestellt werden.

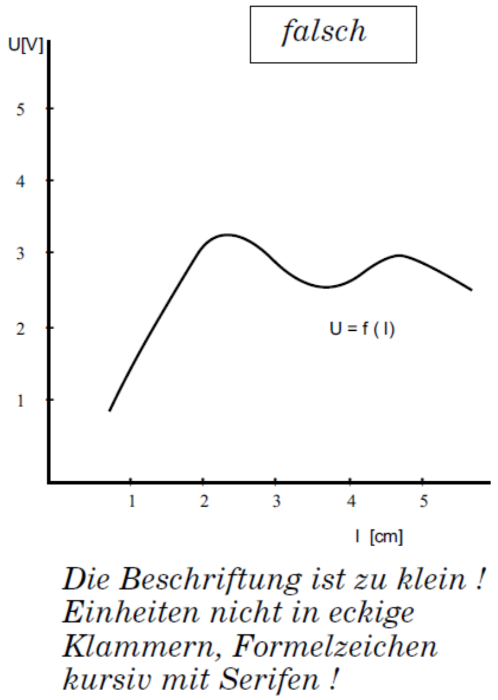
Beispiel:
$s = 450\ \mathrm{m} = 0{,}45\ \mathrm{km},\ t = 30\ \mathrm{s} = 1/120\ \ \mathrm{h},$

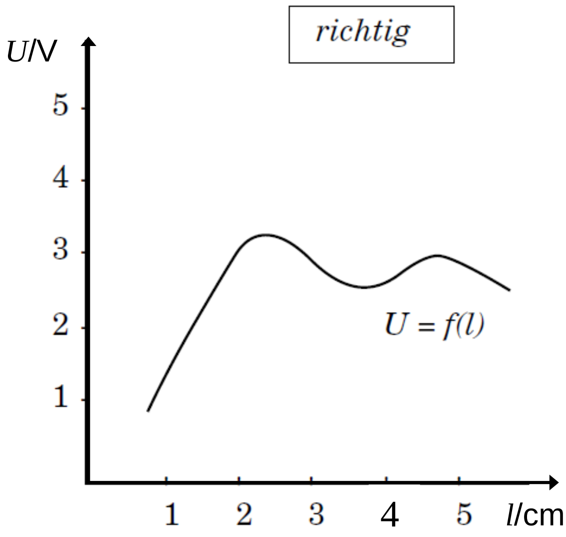
$$v = \frac{s}{t} = \frac{450\ \mathrm{m}}{30\ \mathrm{s}} = \frac{0{,}45\ \mathrm{km}}{1/120\ \mathrm{h}} = 15\ \frac{m}{s} = 54\ \frac{\mathrm{km}}{h}.$$

15 m/s und 54 km/h sind die gleiche Geschwindigkeit. Größengleichungen sollten bevorzugt verwendet werden.

5.2 Graphische Darstellungen

Es gelten die Regeln nach DIN 461 [2].





- Die Zeichen für die Beschriftung müssen mindestens 2 mm hoch sein, für Indizes 1,6 mm.
- Für die Größenangabe an der Koordinatenachse steht das Formelzeichen dividiert durch die Einheit.
- Die Koordinatenachsen werden als Pfeile dargestellt.
- Die meisten Fehler bei graphischen Darstellungen sind eine zu kleine Schrift und zu viele Details.
    - Die graphische Darstellung wird üblicherweise im Format DIN A4 entworfen.
    - Für den Satz wird sie dann verkleinert.
    - Dabei werden die Schriftgrößen und die Strichstärken mit verkleinert. Was im ursprünglichen Entwurf gut zu erkennen ist, ist nach der Verkleinerung oft nicht mehr lesbar.

5.3 Tabellen

In Tabellenköpfen werden Größennamen oder Formelzeichen angegeben. Wenn die Tabelle nur die Zahlenwerte enthält, schreibt man vor die Einheit im Tabellenkopf „in“. Das Einheitenzeichen darf nicht in eckige Klammern gesetzt werden. Im Tabellenkopf kann auch ein Bruch mit dem Formelzeichen im Zähler und dem Einheitenzeichen im Nenner stehen.

Beispiele:

richtig	**richtig**	**falsch**
$\frac{h}{\mathrm{mm}}$	h in mm	h [mm]
$6{,}123 \cdot 10^{-4}$ $\dots$ $\dots$	$6{,}123 \cdot 10^{-4}$ $\dots$ $\dots$	$6{,}123 \cdot 10^{-4}$ $\dots$ $\dots$

5.4 Runden, signifikante Stellen

5.4.1 Beispiel zur Motivation

Angenommen, eine Messgröße x wird mit einem Mittelwert von $\bar{x} = 5{,}4497$ und einem mittleren Fehler von $\Delta x = 0{,}3565$ gemessen.
Die Angabe $x = \bar{x} \pm \Delta x = 5{,}4497 \pm 0{,}3565$, also eine Angabe mit jeweils 4 Nachkommastellen, ist zwar mathematisch korrekt, aber sinnlos, da sie eine zu hohe Genauigkeit der Messung vortäuscht.
Der „wahre“ Wert x liegt demnach im Bereich zwischen
$x_{\min} = \bar{x} - \Delta x = 5{,}4497 - 0{,}3565 = 5{,}0932$ und $x_{\max} = \bar{x} + \Delta x = 5{,}4497 + 0{,}3565 = 5{,}8062$.
Das bedeutet, dass bereits die erste Nachkommastelle nicht sicher ist und die Angabe weiterer Nachkommastellen daher unnötig ist. Man sagt für dieses Beispiel, dass die Stellen ab der zweiten Nachkommastelle ohne Signifikanz, d.h. ohne Bedeutung, sind.

Bei einem Experiment wird für das Ergebnis nur die Zahl signifikanter Stellen angegeben.

Daher sollte das Ergebnis eher in der Form $x = \bar{x} \pm \Delta x = 5{,}4 \pm 0{,}4$ angegeben werden.
Die Regeln zum Runden von Messergebnissen werden ausführlich im folgenden Absatz 5.4.3 behandelt.

5.4.2 Die Anzahl signifikanter Stellen

Die Anzahl signifikanter Stellen eines Messergebnisses lässt sich am besten anhand einiger Beispiele darstellen: jede zuverlässig bekannte Stelle eines Werts, mit Ausnahme führender Nullen, ist eine signifikante Stelle. Auch wenn der Begiff der signifikanten Stelle auf dimensionslose Zahlen anwendbar ist, werden in den folgenden Beispielen stets physikalische Größen mit ihren Einheiten verwendet:

- Die gemessene Länge eines Gegenstands betrage $l = 8{,}454\ \mathrm{m}$. Dieser Wert hat 4 signifikante Stellen.

- Wir könnten das gleiche Resultat aber auch in km angeben. Dann würde das Ergebnis der Längenmessung $l = 0{,}008454\ \mathrm{km}$ lauten. Entscheidend ist, dass die Anzahl der signifikanten Stellen durch die Wahl einer anderen Einheit nicht verändert wurde, sie ist nach wie vor 4.
- Etwas weniger klar ist die Frage nach der Anzahl signifikanter Stellen für die Aussage $l = 8\ \mathrm{m}$ zu beantworten.
  - Diese Angabe hat zunächst einmal genau 1 signifikante Stelle.
  - Aber wie würde die Antwort für den Fall $l = 8{,}000\ \mathrm{m}$ lauten?
    Vom mathematischen Standpunkt ist das ja die gleiche Zahl wie im Beispiel zuvor. Aber jetzt ist es wichtig, wie dieses Ergebnis zustande kam. Wenn die Aussage z.B. durch Abschreiten des entsprechenden Gegenstandes erhalten wurde, dann könnte die wahre Länge durchaus irgendwo zwischen 7,5 m bzw. 8,5 m liegen. Damit ist das Ergebnis höchstens auf ganze Meter bestimmt. In diesem Fall ist die Anzahl signifikanter Stellen nach wie vor 1.
  - Wurde die Länge allerdings mit Hilfe eines Maßbandes mit Zentimetereinteilung gemessen, dann ist das Ergebnis sogar auf Zentimeter genau. Eine sinnvolle Angabe würde dann $l = 8{,}00\ \mathrm{m}$ lauten, und in diesem Fall sind die beiden Nullen nach dem Komma ebenfalls signifikant. Dieses Ergebnis hätte demnach 3 signifikante Stellen.
- Das heißt somit, dass die Regelung bei führenden Nullen eindeutig ist – sie zählen nicht als signifikante Stellen –, dass die Anzahl signifikanter Stellen bei nachfolgenden Nullen leider unbestimmt ist.

5.4.3 Regeln zum Runden von Messergebnissen

5.4.3.1 Runden einer Ergebniszahl

Beim Runden wird die letzte Stelle, die nach dem Runden noch bei der Zahl verbleibt, als ***Rundungsstelle*** bezeichnet. Für das Runden gilt nach DIN 1333 [3] bzw. DIN EN ISO 80000-1:2013 [4] folgende Regel:

- Steht hinter der Rundestelle eine der Ziffern 0 bis 4, so wird abgerundet,
- steht hinter der Rundestelle eine der Ziffern 5 bis 9, so wird aufgerundet.

Mittelwerte von Messergebnissen werden demnach gerundet, wie Sie das von Schulnoten gewohnt sind.

Beispiel:

zu rundende Zahl:	6,217231	6,217 631
Rundungsstelle:	↑	↑
Rundungsverfahren:	Abrunden	Aufrunden
gerundete Zahl:	6,217	6,218

5.4.3.2 Runden von Ergebniszahl mit Unsicherheit

Soll eine Ergebniszahl mit einer Unsicherheit u gerundet werden, so wird die Rundungsstelle nach folgender Regel gefunden:

- Die Unsicherheit wird mit **einer** signifikanten Stelle angegeben, wenn der Zahlenwert dieser Stelle zwischen 3 und 9 liegt. Diese eine Ziffer kennzeichnet die Rundungsstelle. Dies ist für das unten links aufgeführte Beispiel der Fall.
- Beträgt der Wert dieser Stelle 1 oder 2, dann wird die Unsicherheit mit **zwei** signifikanten Stellen angegeben. Die Rundungsstelle ist somit die zweite signifikante Stelle, was im Beispiel unten rechts der Fall ist.

Nach Festlegung der Rundungsstelle erfolgt die Rundung in den folgenden Schritten:

- Die Ergebniszahl und die Unsicherheit werden an der gleichen Stelle gerundet.
- Die Ergebniszahl wird wie oben für die Mittelwerte beschrieben gerundet.
- Die Unsicherheit wird stets **aufgerundet**.

Beispiel:

Ergebniszahl:	8,579617	8,579617
Unsicherheit u:	0,00383	0,001132
Rundungsstelle:	↑	↑
gerundete Ergebniszahl:	8,580	8,5796
aufgerundete Unsicherheit:	0,004	0,0012

Und somit ist auch unser Beispiel zur Motivation in Abschnitt 5.4.1 konsistent zu diesen Regeln: Aus der Angabe $x = \bar{x} \pm \Delta x = 5{,}4497 \pm 0{,}3565$ ergibt dich eine Unsicherheit von Angabe $\Delta x = 0{,}3565$. Wird diese Zahl mit nur einer signifikanten Stelle angegeben, dann ist die erste Nachkommastelle die Rundungsstelle. Da diese aufgerundet wird, beträgt die Unsicherheit gerundet $\Delta x = 0{,}4$. Das bedeutet also, dass sowohl die Ergebniszahl als auch die Unsicherheit auf eine Nachkommastelle gerundet werden. Und somit lautet das gerundete Endergebnis $x = \bar{x} \pm \Delta x = 5{,}4 \pm 0{,}4$.

Check-Liste für die Überprüfung von Manuskripten

- ☐ Es werden nur Einheiten des SI-Einheitensystems benutzt und solche Einheiten außerhalb des SI-Systems, die zusammen mit SI-Einheiten verwendet werden dürfen.

- ☐ Abkürzungen für Einheiten wie zum Beispiel Sek. (für Sekunde, s), ccm (für cm^3) oder U/min (für min^{-1}) kommen nicht vor. Nur die genormten Namen oder Zeichen der zulässigen Einheiten und SI-Vorsätze werden verwendet.

- ☐ Angaben in ppm (parts per million), ppb (parts per billion) oder ppt (parts per trillion) kommen nicht vor. Die entsprechenden Größenwerte können zum Beispiel auf folgende Weise angegeben werden: 2,0 µl/l oder $2{,}0 \cdot 10^{-6}$, 4,3 nm/m oder $4{,}3 \cdot 10^{-9}$, 7 ps/s oder $7 \cdot 10^{-12}$.

☐ Die Einheitenzeichen sind ohne Indizes oder sonstige Anfügungen zu verwenden. Zum Beispiel:

$U_{\mathrm{max}} = 1000\ \mathrm{V}$,	nicht aber: $U = 1000\ \mathrm{V_{max}}$,
$U_{-} = 110\ \mathrm{V}$,	nicht aber: $U = 110\ \mathrm{V_{DC}}$,
ein Massenanteil von 10 %,	nicht aber: 10 % (m/m) oder 10 Gewichts-Prozente.

☐ Aussagen wie: „Die Länge l_1 übertrifft die Länge l_2 um 0,2 %“ sind zu vermeiden. Das Prozentzeichen ist gleichbedeutend mit der Zahl 0,01. Man kann also schreiben:
$l_1 = l_2 \cdot (1 + 0{,}2\ \%)$ oder $\frac{l_1 - l_2}{l_2} = 0{,}2\ \%$.

☐ Es werden keine Informationen mit Einheitenzeichen (oder Einheitennamen) vermischt wie zum Beispiel: 20 ml H_2O/kg. Es muss richtig heißen: „Der Gehalt an Wasser beträgt 20 ml/kg“.

☐ Die Einheitenzeichen sind den Zahlenwerten eindeutig zugeordnet, und es gibt keine Zweifel, welche mathematische Operation auf die angegebenen Größenwerte angewendet werden soll. Die Angaben sind beispielsweise in folgender Weise gemacht:

35 cm × 48 cm,	nicht aber: 35 × 48 cm,
1 MHz bis 10 MHz,	nicht aber: 1 MHz – 10 MHz oder 1 bis 10 MHz,
20 °C bis 30 °C,	nicht aber: 20 °C – 30 °C oder 20 bis 30 °C,
123 g ± 2 g,	nicht aber: 123±2 g, wohl aber (123±2) g
70 % ± 5 % oder (70±5) %,	nicht aber: 70±5 %,
240·(1±10 %) V,	nicht aber: 240 V±10 %.

☐ Einheitennamen und Einheitenzeichen werden nicht kombiniert, mathematische Zeichen werden nicht auf Einheitennamen angewendet. Zum Beispiel werden Kilogramm/m^3, kg/Kubikmeter, Kilogramm/Kubikmeter, kg durch m^3, oder Kilogramm durch Meter^3 vermieden. Die korrekte Einheitendarstellung ist kg/m^3, kg·m^{-3}, oder im Text: Kilogramm durch Kubikmeter.

☐ Zwischen Zahlenwert und Einheit wird ein Zwischenraum gelassen. Eine Ausnahme gibt es nur bei den hochgestellten Einheitenzeichen für den ebenen Winkel:
2° 3' 4", nicht aber: 2 ° 3 ' 4 ".

☐ Bei Größenangaben, die wie ein Adjektiv gebraucht werden, verwendet man zwei Bindestriche. Beispiel: eine 25-kg-Kugel.

☐ Als Dezimalzeichen wird das Komma verwendet, auch in englischsprachigen Texten.

☐ Zahlenwerte, die vom Dezimalkomma ausgehend mehr als vier Ziffern auf einer der beiden Seiten haben, werden ebenfalls vom Komma ausgehend in Dreiergruppen zusammengefasst, die durch einen schmalen Zwischenraum getrennt werden. In die Zwischenräume werden weder Punkte noch Kommata gesetzt. Beispiel: 15 739,012 53.

☐ Es werden vorzugsweise Größengleichungen verwendet. Wenn Zahlenwertgleichungen benutzt werden, sind sie als solche zu kennzeichnen, außerdem muss angegeben werden, in welchen Einheiten die Zahlenwerte einzusetzen sind.

☐ Es werden die genormten Formelzeichen (vgl. DIN 1304 [5]) und die genormten mathematischen Zeichen (vgl. DIN 1302 [6]) verwendet. Zum Beispiel schreibt man „$\tan x$“ und nicht „$\mathrm{tg}\, x$". $\lg x$ bezeichnet den Zehnerlogarithmus, $\log_a x$ allgemein den Logarithmus zur Basis a.

☐ Einheitenzeichen werden steil, Formelzeichen kursiv gedruckt. Indizes an Formelzeichen sind kursiv, wenn sie eine physikalische Größe bedeuten.

☐ Falls das Wort „Gewicht“ verwendet wird, soll die Bedeutung klar sein. Wenn das Wort Gewicht im Sinne einer Kraft benutzt wird, lautet die genormte Benennung „Gewichtskraft“ (siehe DIN 1305 [7]).

☐ Ein Größenquotient, zum Beispiel die Dichte, wird geschrieben: „Masse durch Volumen“ und nicht „Masse pro Volumen“ oder „Masse je Volumeneinheit“.

☐ Zwischen Gegenstand und physikalischer Größe wird unterschieden. Zum Beispiel zwischen „Körper“ und „Masse“, zwischen „Spule“ und „Induktivität“, zwischen „Raum“ und „Volumen“.

☐ Der Name „Molarität“ für die Stoffmengenkonzentration und „Normalität“ für die Äquivalentkonzentration sowie die Zeichen M (molar) und N (normal) für die Einheit mol/l bzw. für die früher verwendete Einheit val/l werden nicht mehr angewendet. Stattdessen wird die Stoffmengenkonzentration $c(x)$ oder die Äquivalentkonzentration $c(\mathrm{eq})$ verwendet (DIN 32 625 [8]).

6 Literaturverzeichnis

[1] Physikalisch-Technische Bundesanstalt, „Leitfaden für den Gebrauch des Internationalen Einheitensystems,“ 1996.

[2] DIN Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.), *DIN 461: Graphische Darstellungen in Koordinatensystemen,* 1973.

[3] DIN Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.), „DIN 1333: Zahlenangaben,“ 1992.

[4] DIN Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.), „DIN EN ISO 80000-1: Größen und Einheiten - Teil 1: Allgemeines,“ 2013.

[5] DIN Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.), *DIN 1304: Formelzeichen; Allgemeine Formelzeichen,* 1994.

[6] DIN Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.), *DIN 1302: Allgemeine mathematische Zeichen und Begriffe,* 1999.

[7] DIN Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.), *DIN 1305: Masse, Wägewert, Kraft, Gewichtskraft, Gewicht, Last; Begriffe,* 1988.

[8] DIN Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.), *DIN 32625: Größen und Einheiten in der Chemie; Stoffmenge und davon abgeleitete Größen; Begriffe und Definitionen,* 1989.