

Versuch 7

Satz von Steiner

Trägheitsmomente am Drehpendel

1 Versuchsziel

Bestimmt werden das Richtmoment C^* der Drehfeder, das Massenträgheitsmoment J_T des Drehtisches und – als eigentliches Ergebnis – das Eigenträgheitsmoment eines Körpers, dessen Massenverteilung man von außen nicht kennt. Der Weg dorthin führt über den Satz von Steiner und zwei Messreihen. Im Mittelpunkt steht dabei eine ingenieurwissenschaftliche Kernkompetenz: *Messdaten so aufzubereiten, dass aus ihnen mit einer linearen Regression eine gesuchte physikalische Größe gewonnen werden kann.* Welche Aufbereitung das ist, erarbeiten Sie sich selbst aus den physikalischen Grundlagen.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Drehfeder und Richtmoment

Der Drehtisch ist über eine Spiralfeder mit dem Gestell verbunden. Verdreht man ihn um den Winkel φ, so wirkt das rücktreibende Moment

$$M = -\,C^*\,\varphi \tag{1}$$

mit dem *Richtmoment* C^* (Einheit N m – der Winkel im Bogenmaß ist eine reine Zahl, der in älteren Texten übliche Zusatz „rad“ entfällt). Es sagt über die Drehfeder dasselbe aus wie die Federkonstante über eine Zugfeder: welches Moment zu einem Winkel gehört.

2.2 Die Schwingungsdauer

Mit dem Drehimpulssatz $J\,\ddot{\varphi} = M$ folgt aus Gleichung (1) unmittelbar die Gleichung einer harmonischen Schwingung und daraus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C^*}}. \tag{2}$$

Der Winkel steht in Gleichung (1) *linear* – nicht als $\sin\varphi$ wie beim Faden- oder physikalischen Pendel. Eine Kleinwinkelnäherung ist deshalb nicht nötig, und die Schwingungsdauer ist **exakt amplitudenunabhängig**: Ob Sie den Tisch um 5 ° oder um 40 ° verdrehen, ändert an T nichts. Das lässt sich im Versuch nachprüfen.

2.3 Satz von Steiner

Das J in Gleichung (2) ist das Trägheitsmoment des *gesamten* drehenden Systems. Es setzt sich aus drei Beiträgen zusammen: dem Trägheitsmoment J_T des Drehtisches, dem Eigenträgheitsmoment J_S des Zusatzkörpers um seinen eigenen Schwerpunkt und dem Steineranteil, der aus dem Abstand a dieses Schwerpunkts von der Drehachse entsteht:

$$J = J_T + J_S + m\,a^2. \tag{3}$$

Der Steineranteil folgt aus $J = \int(\vec{r}+\vec{a})^2\,\mathrm{d}m$; der gemischte Term verschwindet, weil die Abstände $\vec{r}$ vom Schwerpunkt aus gezählt werden. Er gilt nur für eine *parallel verschobene* Achse. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei Walcher (2004), Schenk und Kremer (2014) und Demtröder (2021).

2.4 Zwei Zusatzkörper

Zum Versuch gehören zwei Körper gleicher Masse, aber unterschiedlicher Massenverteilung. Für den *homogenen Vollzylinder* ist das Eigenträgheitsmoment aus der Geometrie berechenbar,

$$J_S = \tfrac{1}{2}\,m\left(\tfrac{d}{2}\right)^2, \tag{4}$$

für den *inhomogenen Körper* nicht – man sieht ihm nicht an, wie die Masse innen verteilt ist. Genau dieses J_S ist das gesuchte Ergebnis. Daraus folgt der zweiteilige Ablauf des Versuchs: Erst werden mit dem homogenen Zylinder die Systemparameter der Drehvorrichtung bestimmt (C^* und J_T), dann wird mit denselben Werten der unbekannte Körper vermessen.

2.5 Schreibweise

In diesem Versuch steht m für die *Masse* des Zusatzkörpers – in der Auswertung heißt aber auch die Steigung der Regressionsgeraden traditionell m; achten Sie darauf, welche der beiden Größen gemeint ist. Ein M ohne Index ist hier stets ein *Moment*, nie eine Masse. Was die Zusatzfragen *Ordinatenabschnitt* nennen, heißt im Auswertewerkzeug c.

3 Zubehör

- Drehpendel: Drehtisch auf senkrechter Achse, über eine Spiralfeder mit dem Gestell verbunden
- Zwei Zusatzkörper gleicher Masse – ein homogener Vollzylinder und ein inhomogener Körper
- Stoppuhr

Größe	Wert	Bedeutung
m	0,86478 kg	Masse beider Zusatzkörper
d	0,068015 m	Durchmesser des homogenen Zylinders
a	0,040 … 0,130 m	sieben Steckpunkte im Radialschlitz

Tabelle 1: Apparaturkonstanten. Über der Drehachse selbst gibt es keine Bohrung – dort sitzt die Nabe.

4 Versuchsaufbau

Der Zusatzkörper wird in eine der sieben Bohrungen des Radialschlitzes gesteckt; sein Schwerpunkt hat dann den Abstand a von der Drehachse (Abbildung 1). Verdreht man den Tisch und lässt los, schwingt er um die senkrechte Achse. Gemessen werden der Abstand a und die Schwingungsdauer T.

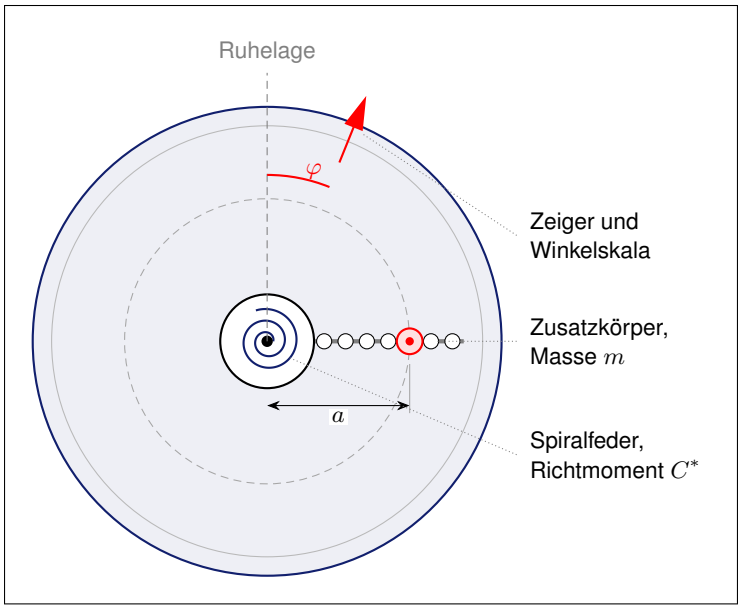


Abbildung 1: Draufsicht auf das Drehpendel. Der Zusatzkörper steckt im Abstand a von der Drehachse; die gestrichelte Kreisbahn zeigt, auf welcher Bahn sein Schwerpunkt beim Schwingen läuft. Der Zeiger am Rand gibt die Auslenkung φ gegenüber der Ruhelage an.

5 Aufgaben

1. **Systemparameter mit dem homogenen Zylinder.** Die Schwingungsdauer ist für alle sieben Steckpunkte zu messen. Aus dieser Messreihe sind das Richtmoment C^* der Drehfeder und das Trägheitsmoment J_T des Drehtisches zu bestimmen. Beides sind Eigenschaften der Apparatur und gelten daher auch für den zweiten Teil.
2. **Der inhomogene Körper.** Mit demselben Vorgehen ist eine zweite Messreihe aufzunehmen. Aus ihr und den Systemparametern aus Teil 1 ist das Eigenträgheitsmoment J_S des inhomogenen Körpers zu bestimmen.
3. **Probe auf Amplitudenunabhängigkeit.** An einem Steckpunkt ist die Schwingungsdauer zusätzlich bei deutlich größerer Auslenkung zu messen und mit dem ersten Wert zu vergleichen.

6 Versuchsdurchführung

- Der Zusatzkörper ist fest in die Bohrung zu setzen; ein loser Körper verfälscht die Schwingungsdauer.
- Der Tisch ist ohne Stoß auszulenken und loszulassen, damit die Schwingung nicht überlagert wird.
- Gestoppt wird über mindestens zehn Schwingungen; die Einzelperiode ergibt sich durch Division. So bleibt der Reaktionsfehler beim Starten und Stoppen der Uhr klein gegenüber der Gesamtzeit.
- Zwischen den beiden Versuchsteilen ist der Körper zu wechseln; die Messreihen sind getrennt zu protokollieren.
- Zu jeder Ablesung ist die Messunsicherheit abzuschätzen und zu protokollieren.

7 Auswertung

Setzt man Gleichung (3) in Gleichung (2) ein, so hängt die Schwingungsdauer allein vom Steckabstand und den gesuchten Größen ab. In den gemessenen Größen ist dieser Zusammenhang *nicht* linear.

Auftragung. Für jeden der beiden Versuchsteile ist eine Auftragung der Messgrößen zu bestimmen, die einen linearen Zusammenhang ergibt. Die beiden Auftragungen sind nicht dieselbe – beim homogenen Zylinder ist mehr bekannt als beim inhomogenen. Die gewählte Achsenkombination ist jeweils zu begründen.

Ergebnisse. Aus den Regressionsparametern des ersten Teils sind C^* und J_T zu bestimmen, aus denen des zweiten Teils zusammen mit diesen Werten das gesuchte J_S. Als Kontrolle ist C^* auch aus der zweiten Messreihe zu ermitteln und mit dem Wert aus dem ersten Teil zu vergleichen.

Fehlerbetrachtung. Zu diskutieren ist, wie sich eine Unsicherheit in der gestoppten Zeit auf das Ergebnis auswirkt und warum ein Fehler in den Apparaturparametern aus Teil 1 den zweiten Teil vollständig mitnimmt.

Hinweis. Die *Zusatzfragen zur Vorbereitung* konkretisieren die Auswertung dieses Versuchs; sie sind vor dem Versuch zu bearbeiten. Die digitale Auswertung erfolgt im interaktiven E-Learning beziehungsweise im Online-Versuch der *Digital Labs*.

8 Quellen und weiterführende Literatur

Demtröder, W. (2021). *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. 9. Aufl. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum. DOI: 10.1007/978-3-662-62728-0.

Schenk, W. und F. Kremer, Hrsg. (2014). *Physikalisches Praktikum*. 14. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum. DOI: 10.1007/978-3-658-00666-2.

Walcher, W. (2004). *Praktikum der Physik*. 8. Aufl. Wiesbaden: Teubner. DOI: 10.1007/978-3-322-94128-2.